



Technische
Universität
Braunschweig



LENA
Laboratory
for Energy
Nanotechnology



Institut für
Halbleitertechnik

Grundlagen der Elektronik und Photonik

Kapazität eines p-n-Übergangs

Prof. Dr. Andreas Waag

1

Bänderschema von Halbleitern

Die Inhalte dieses Clips entsprechen Level 3

- Level 1 Basiswissen Phase 1 (teilweise noch Schulwissen)
- Level 2 Basiswissen Phase 2 (Eingangskurse Bachelor)
- Level 3 Ziel-Niveau „Grundlagen der Elektronik und Photonik“
- Level 4 vertiefendes Wissen (Eingangskurse Master)
- Level 5 Expertenwissen (Fortgeschrittenen-Kurse Master)
- Level 6+ Wissensgrenze

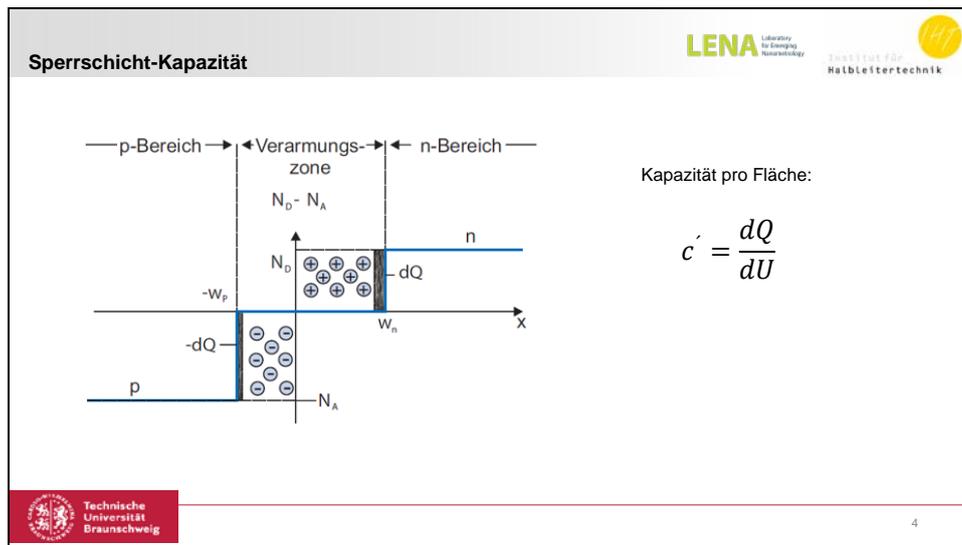
UNIVERSITÄT
LENA
Laboratory for Energy
Nanotechnology

INSTITUT FÜR
Halbleitertechnik

Technische
Universität
Braunschweig

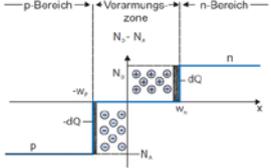
Hinweis

Ein PN-Übergang hat auch kapazitive Eigenschaften. Kapazitäten müssen z. B. bei der Untersuchung der maximalen Schaltgeschwindigkeiten von Transistoren berücksichtigt werden, da PN-Übergänge und die damit verbundenen Raumladungszonen sowohl in Bipolar-Transistoren als auch in MOSFETs auftreten. Die Kapazität eines PN-Übergangs ist abhängig von der angelegten Spannung.



Ein p-n-Übergang hat auch kapazitive Eigenschaften. Diese müssen z.B. für maximale Schaltgeschwindigkeiten von Transistoren berücksichtigt werden, da p-n-Übergänge auch sowohl in MOSFETs als Abgrenzung zu den angrenzenden Halbleiter-Zonen und in Bipolar-Transistoren vorkommen. Die Kapazität eines p-n-Übergangs entsteht durch die Raumladungszone, die die beiden leitfähigen n- und p-dotierten Bereich voneinander trennt. Ändert man die Spannung in Sperrrichtung, so ändert sich die Breite der Raumladungszone und damit auch deren Kapazität. Die Kapazität eines p-n-Übergangs ist deshalb abhängig von der angelegten Spannung. C-Strich ist die Kapazität pro Fläche. Sie ist definiert als die Änderung der Ladung dQ geteilt durch die zugehörige Änderung der Spannung dU . Die RLZ verhält sich wie ein Plattenkondensator, bei dem der Abstand der Platten gleich der Breite der RLZ ist.

Sperrschicht-Kapazität



$$w = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s(U_D - U)}{q} \left(\frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right)}$$

$$c'_S = \frac{\varepsilon A}{w} = \frac{\varepsilon}{w}$$

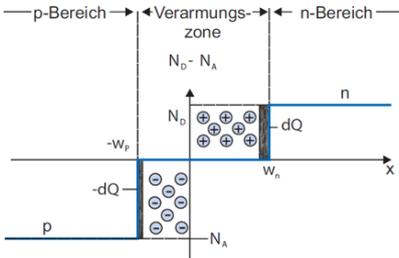
$$c'_S = \frac{\varepsilon}{w} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{2\varepsilon_s(U_D - U)}{q} \left(\frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{2\varepsilon_s(U_D)}{q} \left(\frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right)}} \sqrt{1 - \frac{U}{U_D}}$$


5

Die Breite der RLZ ändert sich mit der Spannung U . In der Gleichung für w ist die Spannung U positiv, wenn in Durchlassrichtung gepolt. Hier wollen wir zunächst vor allem die Sperrrichtung betrachten. In der Gleichung treten dann negative Spannungen auf, die Breite der RLZ vergrößert sich mit steigender Sperrspannung U . Die Kapazität eines Plattenkondensators ist gegeben durch (Gleichung). Epsilon ist die Dielektrizitätskonstante des Halbleiters, deren Zahlenwert liegt typischerweise zwischen 10 und 12. w kann nun in die Formel für die Kapazität des Plattenkondensators eingesetzt werden. Durch Umformung kann noch die Spannung U ausgeklammert werden. Der erste Teil des Resultats entspricht der Kapazität für $U=0$, der zweite Teil der Gleichung beschreibt die Spannungsabhängigkeit.

Sperrschicht-Kapazität



$$c'_S = \frac{c'_S(U = 0)}{\sqrt{1 - \frac{U}{U_D}}}$$



6

Zusammengefasst ergibt sich eine doch einigermaßen übersichtliche Gleichung für die Kapazität pro Fläche einer p-n-Diode (Gleichung).

Sperrschicht-Kapazität für beliebige Dotierprofile




$$c'_S = \frac{c'_S(U=0)}{\sqrt{1 - \frac{U}{U_D}}}$$

homogenes Dotierprofil

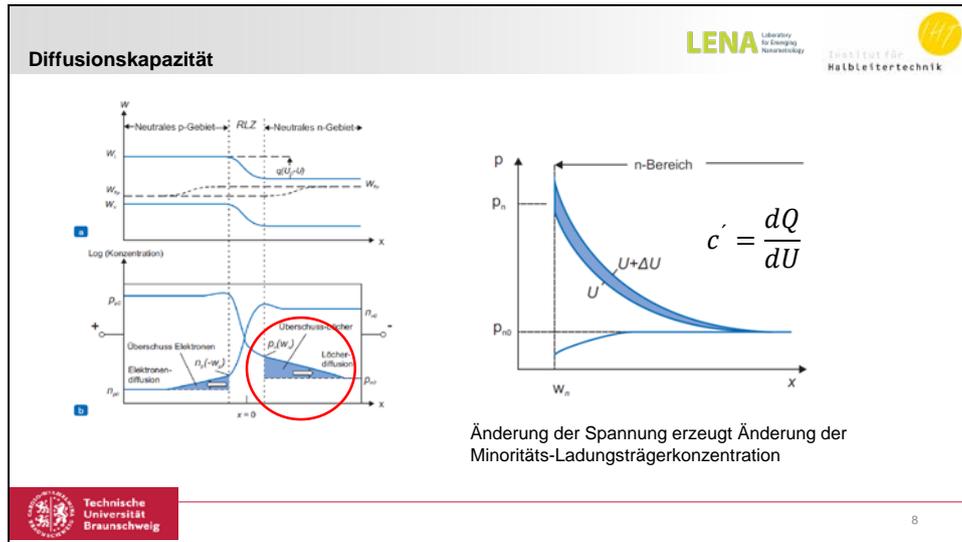
$$c'_S = \frac{c'_{j0}(U=0)}{\left(1 - \frac{U}{U_D}\right)^{m_j}}$$

inhomogenes Dotierprofil



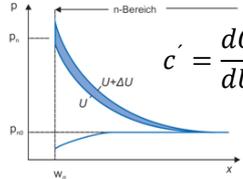
7

Die bisherige Gleichung wurde hergeleitet unter der Annahme, dass die Dotierprofile homogen sind, d.h. unabhängig vom Ort überhall die gleiche Konzentration an geladenen Donatoren und Akzeptoren vorherrscht. Dies war bei der Herleitung der Formel für die Breite der RLZ vorausgesetzt worden. Innerhalb eines CMOS-Prozesses kommt es allerdings immer zur Diffusion von Dotierstoffen, die zu einer inhomogenen Verteilung führt. Oft ist diese Verteilung nicht bekannt oder soll auch nicht bekannt werden, da dies evtl. ein Betriebsgeheimnis der CMOS Foundry darstellt. Deshalb verwendet man bei der Beschreibung von Dioden, die im CMOS Prozess auftreten, eine Parametrisierung. Die Gleichung ist an die hergeleitete ideale Gleichung angelehnt, ist aber verallgemeinert. Statt der Wurzel im Nenner setzt man einen Exponenten m_j ein. Ist die Diode ideal, also mit homogenem Dotierprofil, so ist m_j gleich $\frac{1}{2}$. Auf diese Art und Weise können auch inhomogen dotierte Dioden beschrieben werden. Die Parameter m_j und die Kapazität für $U=0$ c_{j0} können aus einer Diode herausgemessen werden. Die Gleichung bildet dann die Grundlage für die Simulation einer Schaltung. Die experimentellen Werte für m_j liegen meist zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$.



Auch im Durchlassbereich ändert sich die Breite der RLZ. Allerdings ergibt sich im Durchlass-Bereich noch ein weiterer Beitrag zum Kapazität einer Diode: die Diffusionskapazität. Wir betrachten den n-seitigen Rand der RLZ genauer. Hier ist im Durchlass-Betrieb die Konzentration an Löcher, die dort die Minoritäten darstellen, erhöht. Eine Änderung der Spannung ändert auch die Konzentration der Löcher im n-Bereich und damit die Ladung. Für kleine Vorwärts-Spannungen spielt diese Ladung noch keine Rolle. Für große Durchlass-Spannungen, verbunden mit hohen Durchlass-Strömen, wird dieser Anteil aber dominieren. Im Wechselspannungs-Betrieb ergibt sich deshalb eine ständige Änderung der Ladung, die Anlass für kapazitives Verhalten gibt. Das Wechselspannungs-Verhalten soll nun in der sog. Kleinsignal-Näherung genauer beschrieben werden.

Diffusionskapazität



$$c' = \frac{dQ}{dU}$$

$$U(t) = U_0 + u_w(t) = U_0 + \hat{u}(t)e^{i\omega t}$$

$$J(t) = J_0 + j(t) = J_0 + \hat{j}(t)e^{i\omega t}$$

$$n_p(-w_p) = n_{p0} \exp\left(\frac{qU}{kT}\right) = n_{p0} \exp\left(\frac{q(U_0 + u(t))}{kT}\right)$$

$$n_p(-w_p) = n_{p0} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) \exp\left(\frac{q\hat{u}(t)e^{i\omega t}}{kT}\right)$$

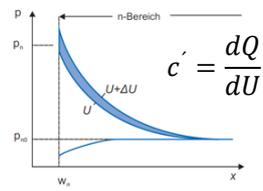

9

Die Diode soll mit einer Wechselfspannung $U(t)$ betrieben werden. Diese setzt sich aus einem Gleichspannungs-Anteil U_0 und einem Wechselfspannungsanteil u_w zusammen. Große Buchstaben entsprechen einem DC-Wert, kleine Buchstaben werden für zeitabhängige Werte verwendet. Der zeitabhängige Spannungs-Anteil kann geschrieben werden als (Gleichung).

Die Spannung hat einen Strom in Durchlass-Richtung zur Folge, der ebenfalls zeitabhängig ist. (Gleichung).

Hieraus kann die zugehörige Änderung der Konzentration von Elektronen im p-Bereich berechnet werden (Gleichung). Dabei wurde „nur“ die Spannung $U(t)$ in die bekannte Gleichung für $n_p(w_p)$ eingesetzt.

Diffusionskapazität



LENA Laboratory for Energy Nanotechnology
Institut für Halbleitertechnik

$$U(t) = U_0 + u_w(t) = U_0 + \hat{u}(t)e^{i\omega t}$$

$$J(t) = J_0 + j(t) = J_0 + \hat{j}(t)e^{i\omega t}$$

$$\exp\left(\frac{q\hat{u}(t)e^{i\omega t}}{kT}\right) \approx 1 + \frac{q\hat{u}(t)e^{i\omega t}}{kT}$$

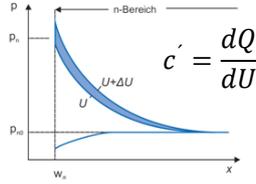
$$n_p(-w_p) = n_{p0} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) \left(1 + \frac{q\hat{u}(t)e^{i\omega t}}{kT}\right)$$

$$n_p(-w_p) = n_{p0} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) + n_{p0} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) \frac{q\hat{u}(t)e^{i\omega t}}{kT}$$


10

In der Näherung nur kleiner Amplituden $u_{\text{Dach}}(t)$ kann man die zweite Exponentialfunktion entwickeln und nach dem ersten Glied abbrechen. Ausmultipliziert und eingesetzt ergibt sich für n_p eine DC-Term (Gleichung), den wir vom DC-Betrieb der Diode her kennen. Zusätzlich ergibt sich noch ein AC-Term für n_p : dieser besteht aus einem Vorfaktor und einer Winkelfunktion (Gleichung)

Diffusionskapazität



$c' = \frac{dQ}{dU}$

LENA Laboratory for Energy Nanotechnology

Institut für Halbleitertechnik

$$U(t) = U_0 + u_w(t) = U_0 + \hat{u}(t)e^{i\omega t}$$

$$J(t) = J_0 + j(t) = J_0 + \hat{j}(t)e^{i\omega t}$$

$$n_p(-w_p) = n_{p0} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) + \widehat{n}_{p0} e^{i\omega t}$$

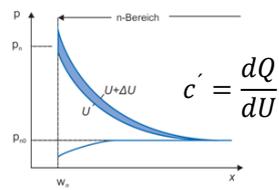


Technische Universität Braunschweig

11

Der Term für n_p kann noch einmal vereinfacht werden: der Vorfaktor im AC-Teil kann als Amplitude \widehat{n}_{p0} geschrieben werden. Es ergibt sich damit folgendes Ergebnis für die zeitabhängige Konzentration von Elektronen im p-Bereich (Gleichung). Die mit dieser Umladung verbundene Änderung der Ladungsträgerkonzentration gibt Anlass für die Diffusionskapazität. Der Name „Diffusionskapazität“ soll auf die Diffusion von Ladungsträgern über die RLZ hinweg verweisen. Der Gleichstrom-Anteil (DC-Anteil) ist uns von der DC-Betrachtung her schon bekannt. Dieser führt über die Stromgleichungen und den Relaxationszeitansatz zur Shockley-Gleichung. Zusätzlich muss nun der Wechselstrom-Anteil (AC-Anteil) berücksichtigt werden.

Diffusionskapazität



LENA laboratory for Energy Nanotechnology

Institut für Halbleitertechnik

$$U(t) = U_0 + u_w(t) = U_0 + \hat{u}(t)e^{i\omega t}$$

$$J(t) = J_0 + j(t) = J_0 + \hat{j}(t)e^{i\omega t}$$

$$n_p(t) = \widehat{n}_{p0} e^{i\omega t}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - r_{net} = 0$$

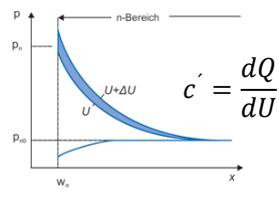
$$J_n = qn\mu_n E + qD_n \frac{\partial n}{\partial x} = qD_n \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$r_{net} = \frac{(n_p - n_{p0})}{\tau_n}$$


12

Der AC-Anteil der Ladungsträger beträgt (Gleichung). Dieser soll nun in die Kontinuitäts-Gleichung (Gleichung) eingesetzt werden. Wie schon in der Herleitung für den DC-Fall vernachlässigen wir den Feldstrom, da im p-Bereich nur sehr kleine Felder auftreten. Daraus ergibt sich für den Strom (Gleichung). Zusätzlich wird wieder ein Relaxationszeit-Ansatz für die Rekombination von Minoritäts-Ladungsträgern angenommen. (Gleichung). Diese Herleitung folgt damit genau der für den DC-Fall, nur dass nun zeitlich variierende Trägerkonzentrationen $n(t)$ eingesetzt werden müssen.

Diffusionskapazität



$c' = \frac{dQ}{dU}$

$U(t) = U_0 + u_w(t) = U_0 + \hat{u}(t)e^{i\omega t}$
 $J(t) = J_0 + j(t) = J_0 + \hat{j}(t)e^{i\omega t}$
 $n_p(t) = \widehat{n}_{p0} e^{i\omega t} \quad \frac{dn}{dt} = i\omega n_p(t)$

$$r_{net} = \frac{(n_p - n_{p0})}{\tau_n}$$

$$J_n = qD_n \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial J_n}{\partial x} = qD_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$


13

Aus $n(t)$ ergibt sich die Ableitung dn/dt (Gleichung). Für den Gradienten des Stroms ergibt sich (Gleichung). Diese Gleichungen werden nun in die Kontinuitätsgleichung eingesetzt

Diffusionskapazität




$$\frac{dn}{dt} = i\omega n_p(t) \qquad \frac{\partial J_n}{\partial x} = qD_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \qquad r_{net} = \frac{(n_p - n_{p0})}{\tau_n}$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} r_{net} = 0$$

$$i\omega n_p(t) = D_n \frac{\partial^2 n_p(t)}{\partial x^2} - \frac{n_p(t)}{\tau_n}$$



Technische
Universität
Braunschweig

14

Aus $n(t)$ ergibt sich die Ableitung dn/dt (Gleichung). Für den Gradienten des Stroms ergibt sich (Gleichung). Hierbei wurde berücksichtigt, dass r_{net} ja gerade für die Abweichung vom Gleichstromfall gelten soll, also $r_{net} = n_p(t)$. Es sind ja Gleichungen für die Abweichung vom Gleichstrom-Fall. Dies gilt für alle Größen in den Gleichungen.

Diffusionskapazität

$$i\omega n_p(t) = D_n \frac{\partial^2 n_p(t)}{\partial x^2} - \frac{n_p(t)}{\tau_n}$$

↓

$$\frac{\partial^2 n_p(t)}{\partial x^2} - \frac{n_p(t)}{\tau_n D_n} (1 + i\omega\tau_n) = 0$$

$$\frac{1}{\tau_n} \xrightarrow{\text{wird ersetzt durch}} \frac{1 + i\omega\tau_n}{\tau_n}$$

LENA Laboratory for Energy Nanotechnology

INSTITUT FÜR Halbleitertechnik



Technische
Universität
Braunschweig

15

Die Gleichung kann noch weiter umgeschrieben werden zu (Gleichung). Vergleichen wir dies nun mit der Gleichung, die wir für den Gleichstrom-Anteil erhalten hatten. Die beiden Differentialgleichungen unterscheiden sich nur durch die Ersetzung (Gleichung). Die Ergebnisse für den Gleichstromfall können deshalb direkt übernommen werden, es müssen nur die entsprechenden Ersetzungen vorgenommen werden.

Diffusionskapazität

$$J_{gesamt}(U) = J_s \left(\exp\left(\frac{qU}{kT}\right) - 1 \right)$$

$$J_s = \frac{qD_p p_{n0}}{L_p} + \frac{qD_n n_{p0}}{L_n}$$

$\frac{1}{\tau_n}$ wird ersetzt durch $\frac{1 + i\omega\tau_n}{\tau_n}$

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$$

LENA Laboratory for Energy Nanotechnology

Institut für Halbleitertechnik

$$U(t) = U_0 + u_w(t) = U_0 + \hat{u}(t)e^{i\omega t}$$

$$J_{gesamt}(U) = J_0 + J_{s,w} \frac{q\hat{u}(t)}{kT} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) e^{i\omega t}$$

$$J_{s,w} = \frac{qD_p p_{n0}}{L_p} \sqrt{1 + i\omega\tau_n} + \frac{qD_n n_{p0}}{L_n} \sqrt{1 + i\omega\tau_n}$$



Technische
Universität
Braunschweig

16

Man kann deshalb in die Shockley Gleichung für den DC Fall die Spannung $U(t)$ einsetzen. Dabei werden wieder kleine Amplituden angenommen, so dass der AC-Exponentialterm entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen werden kann. Man erhält deshalb für die Summe der Diffusionsströme: (Gleichung).

Diffusionskapazität

$$J_{gesamt}(U) = J_s \left(\exp\left(\frac{qU}{kT}\right) - 1 \right) \quad U(t) = U_0 + u_w(t) = U_0 + \hat{u}(t)e^{i\omega t}$$

$$J_{gesamt}(U) = J_s \left(\exp\left(\frac{q(U_0 + \hat{u}(t)e^{i\omega t})}{kT}\right) - 1 \right)$$

$$J_{gesamt}(U) = J_s \left(\exp\left(\frac{q(U_0)}{kT}\right) \exp\left(\frac{q(\hat{u}(t)e^{i\omega t})}{kT}\right) - 1 \right)$$

$$J_{gesamt}(U) = J_s \left(\exp\left(\frac{q(U_0)}{kT}\right) \left(1 + \frac{q(\hat{u}(t)e^{i\omega t})}{kT} \right) - 1 \right)$$

$$J_{gesamt}(U) = J_0 + J_{s,w} \frac{q\hat{u}(t)}{kT} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) e^{i\omega t}$$



LENA
Laboratory for Energy
Nanotechnology



INSTITUT FÜR
Halbleitertechnik



Technische
Universität
Braunschweig

17

Hier ist die Rechnung im Detail: Einsetzen von $U(t)$ in die Shockley-Gleichung, entwickeln des AC-Anteils der Exponentialfunktion wegen kleiner Amplituden, und geeignetes Zusammenfassen.

Diffusionskapazität

$$J_{gesamt}(U) = J_0 + J_{s,w} \frac{q\hat{u}(t)}{kT} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) e^{i\omega t} \quad u_w(t) = \hat{u}(t)e^{i\omega t}$$

$$J_{s,w} = \frac{qD_p p_{n0}}{L_p} \sqrt{1 + i\omega\tau_n} + \frac{qD_n n_{p0}}{L_n} \sqrt{1 + i\omega\tau_n}$$

$$y' = \frac{j(t)}{u(t)} = \left(\frac{1}{r}\right)' + i\omega c_D' \quad \left(\frac{1}{r}\right)' = J_{s,w} \frac{q}{kT} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right)$$

$$c_D' = \frac{q}{2kT} \exp\left(\frac{qU_0}{kT}\right) (qL_p p_{n0} + qL_n n_{p0})$$

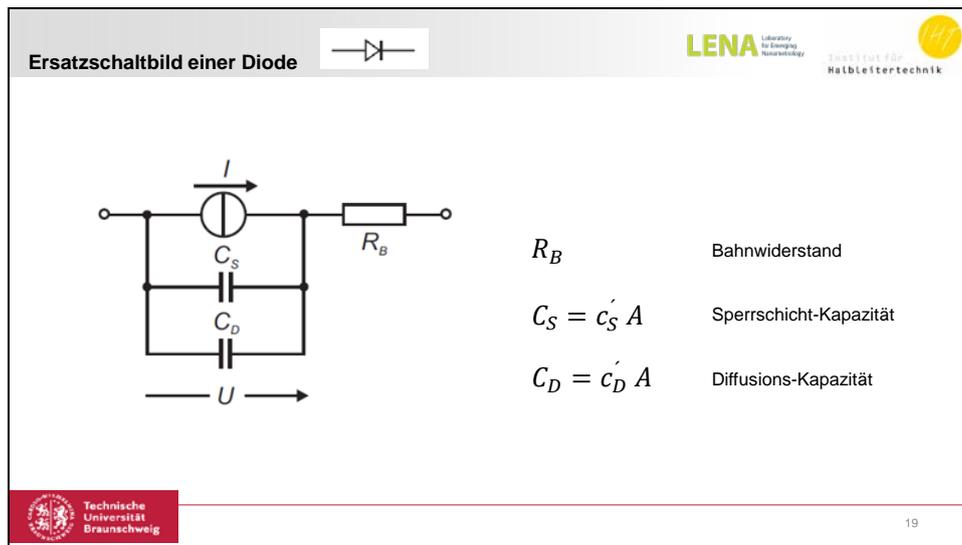





$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$

18

Aus dem Wechselstrom-Anteil ergibt sich auf Grund des komplexen Sättigungsstroms $J_{s,w}$ ein komplexer Leitwert y pro Fläche: Die beiden Komponenten $1/r$ und c_D können durch Koeffizienten-Vergleich ermittelt werden. $1/r$ ist der differentielle Leitwert und c_D die differentielle Diffusions-Kapazität, beides pro Fläche. Für niedrige Frequenz, auf die wir uns hier beschränken wollen, soll $\omega\tau_n$ sehr viel kleiner als 1 sein. Für den Realteil kann man die Wurzel als 1 annähern. Damit erhält man für den differentielle Widerstand $1/r$ (Gleichung). Für den Imaginärteil muss die Wurzel entwickelt werden, sonst würde der Imaginärteil völlig unter den Tisch fallen. Nach Entwicklung der Wurzel für kleine Frequenzen erhält man für die Diffusions-Kapazität (Gleichung) Aus der Gleichung erkennt man: Die Diffusionskapazität steigt mit wachsender DC-Spannung U_0 exponentiell an, genau so wie der Strom durch eine Diode. Diffusionskapazität und Strom sind demnach proportional zueinander.



Aus dem bisher gesagten ergibt sich das hier gezeigte Ersatzschaltbild einer Diode, das in Schaltungssimulationen genutzt wird, um die Reaktion der Diode auf äußere Spannungen zu beschreiben. Zusätzlich zum bisher gesagten sind noch die Bahnwiderstände R_B mitberücksichtigt. Diese ergeben sich aus den bisher zwar vernachlässigten, aber gerade bei hohen Strömen doch merkbaren Zuleitungswiderständen der n- und p-Gebiete. Die Gesamtkapazitäten ergeben sich aus den flächenbezogenen Kapazitäten durch Multiplikation mit der Fläche.