



Technische  
Universität  
Braunschweig



LENA  
Laboratory  
for Energy  
Nanotechnology



Institut für  
Halbleitertechnik

## Grundlagen der Elektronik und Photonik

### Dotierung von Halbleitern

Prof. Dr. Andreas Waag

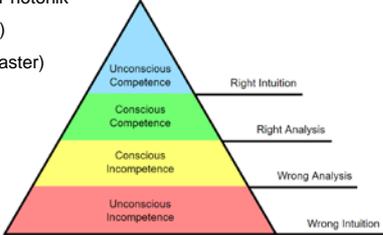
1

**Bänderschema von Halbleitern**

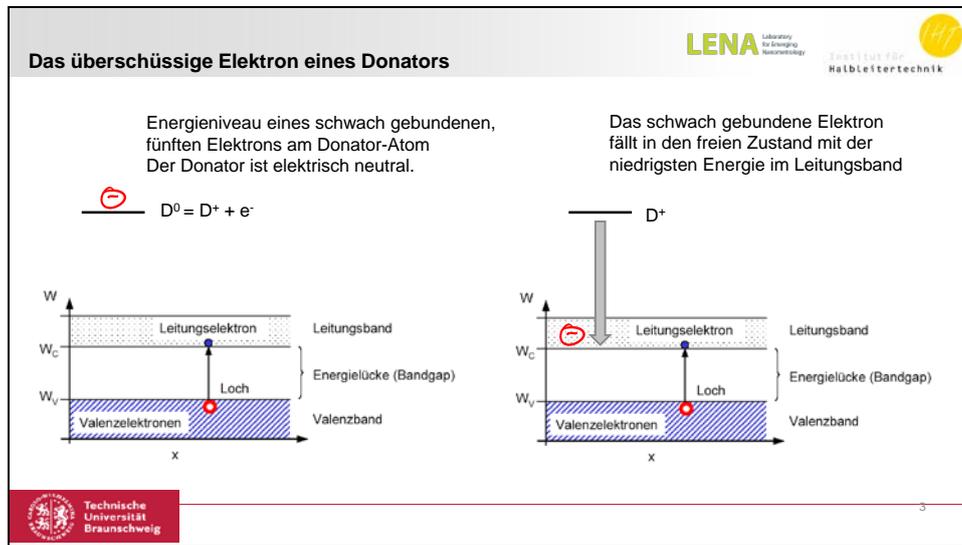
LENA Laboratory for Energy Nanotechnology  INSTITUT FÜR Halbleitertechnik

Die Inhalte dieses Clips entsprechen Level 3

- Level 1 Basiswissen Phase 1 (teilweise noch Schulwissen)
- Level 2 Basiswissen Phase 2 (Eingangskurse Bachelor)
- Level 3 Ziel-Niveau „Grundlagen der Elektronik und Photonik“
- Level 4 vertiefendes Wissen (Eingangskurse Master)
- Level 5 Expertenwissen (Fortgeschrittenen-Kurse Master)
- Level 6+ Wissensgrenze



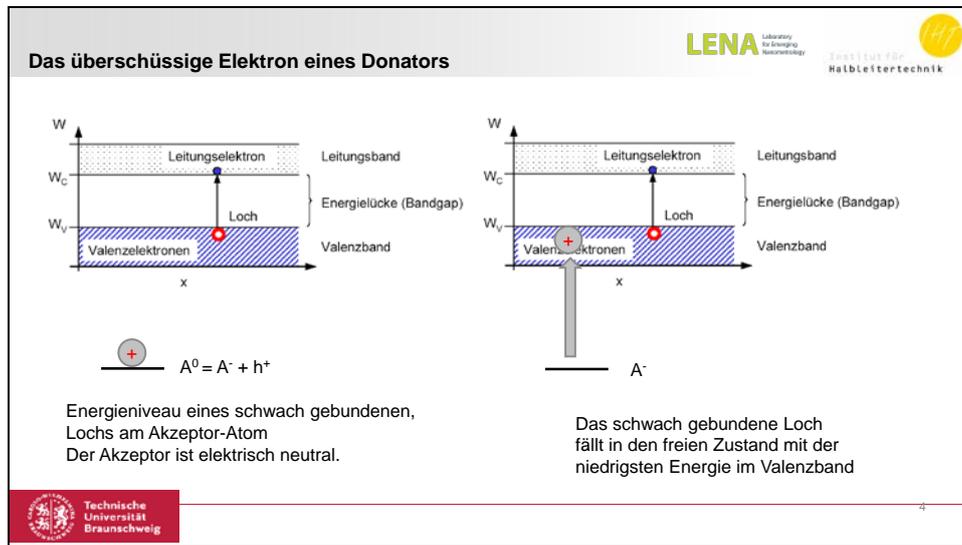
Technische Universität Braunschweig 



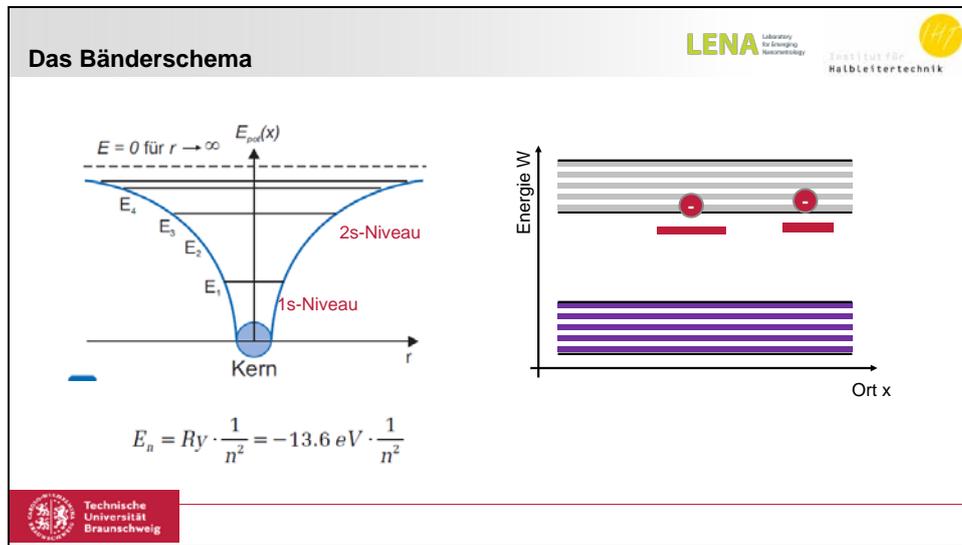
Um in einem Halbleiter Stromtransport zu realisieren, müssen frei bewegliche Elektronen oder frei bewegliche Löcher oder beides vorhanden sein. Freie Ladungsträger werden einerseits durch thermische Anregung über die Bandlücke hinweg erzeugt. Hierzu gibt es einen Clip „Thermische Anregung“. Hier konzentrieren wir uns nun auf die Dotierung von Halbleitern. Dotierung bedeutet, dass während des Herstellungs-Prozesses Fremdatome in den Halbleiter eingebracht werden. Donatoren liefern frei bewegliche Elektronen, Akzeptoren liefern frei bewegliche Löcher. Der Halbleiter bleibt dabei elektrisch neutral. Die genaue Wirkungsweise eines Donators ist in dieser Folie gezeigt. Als Beispiel besprechen wir einen Donator in Silizium.

Silizium ist ein Halbleiter der Guppe-IV. D.h., die Silizium-Atome gehören zu 4. Hauptgruppe des Periodensystems. Jedes Silizium-Atom besitzt 4 Außenelektronen, die für die Energieeinveaus und damit für die Bindungen im Leitungsband und im Valenzband sorgen. Wir nun ein Donatoratom aus der 5. Hauptgruppe des Periodensystems, z.B. Phosphor, in das Silizium-Kristallgitter eingebracht, so beseitzt dieser Donator ein Elektron zu viel. Genauer: das Donator-Atom ist elektrisch neutral, aber das 5. Elektron wird nicht mehr für Bindungen im Leitungs- oder Valenzband benötigt. Das 5. Elektron ist deshalb nur sehr schwach an das Atom gebunden und befindet sich deshalb im Bänderschema weit oberhalb des Leitungsbandes. Dieses schwach gebundene Elektron findet freie Zustände im Leitungsband, und wird deshalb sofort an das Leitungsband abgegeben. Obwohl der gesamte Kristall immer noch elektrisch neutral ist, haben wir jetzt ein Elektron im Leitungsband, zusätzlich zu den thermisch angeregten Elektronen. Dieses ist frei beweglich und kann zum Stromtransport beitragen. Das jetzt vom Donator abgetrennte Elektron hinterlässt einen positiv geladenen Donator-Rumpf.





Für einen Akzeptor ist die Situation genau umgekehrt: Ein Akzeptor hat ein Bindungselektron zu wenig, also quasi ein Loch zu viel. Dieses Loch trennt sich vom elektrisch neutralen Akzeptor und wird an das Valenzband abgegeben. Es findet sich im energetisch günstigsten Zustand wieder, der für Löcher aber „oben“ ist. Das ins Valenzband abgegebene Loch hinterlässt einen negativ geladenen Akzeptor-Rumpf. Der negativ geladene Akzeptor-Rumpf ist – wie auch der positiv geladene Donator-Rumpf auch – ist an einem bestimmten Ort lokalisiert. Dies spielt im folgenden eine wichtige Rolle.

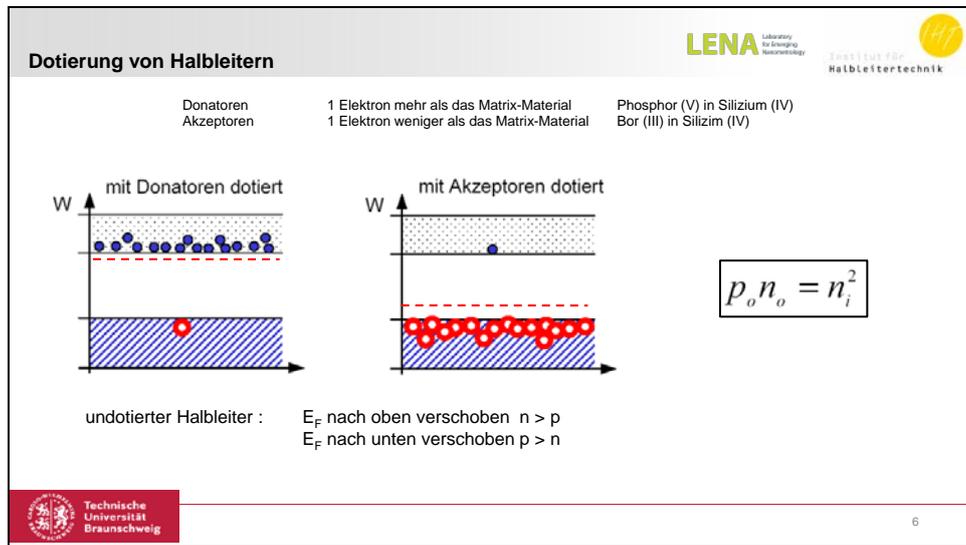


Der positiv geladene Donator, der sein überschüssiges Elektron an das Leitungsband abgegeben hat, erzeugt ein auf Grund seiner positiven Ladung ein Coulomb-Potential, in dem das Elektron dann im zweiten Schritt wieder an den Donator-Rumpf gebunden werden kann. Der positiv geladene Donator-Rumpf zieht das negativ geladene Elektron an. Die zugehörige Kraft ist die Coulomb-Kraft. Das zugehörige Potential ist das Coulomb-Potential, das proportional zu  $1/r$  ist. Dabei ist  $r$  der Abstand zwischen Elektron und Donator. Bemüht man die quantenmechanische Schrödinger-Gleichung – was wir hier allerdings nicht tun werden – so ergeben sich die Energieniveaus einer Ladung  $e$  im Coulomb-Potential. Ein derartige Situation ist in der Physik sehr gut bekannt. Sie entspricht einem Wasserstoff-Atom, bei dem ebenfalls ein Elektron an eine positive Ladung gebunden ist. Dort stammt die positive Ladung aber vom Atomkern, dem Proton des Wasserstoff-Atoms. Ansonsten sind die beiden Situationen aber sehr ähnlich.

Aus der Lösung der Schrödinger-Gleichung ergeben sich die Energieniveaus eines Wasserstoff-Atoms (Gleichung).  $E_n$  ist die Energie zur Quantenzahl  $n$ . Die Quantenzahl  $n$  ist ganzzahlig und kann Werte von 1 bis unendlich annehmen. Die Proportionalitätskonstante nennt man Rydberg-Konstante. Befindet sich das Elektron im Zustand  $n=1$ , so ist es im Grundzustand.  $n = \text{unendlich}$  entspricht der Bindungsenergie Null, das heißt dem ungebundenen Zustand.

Der gebundene Zustand für  $n=1$  kann als lokalisierter Zustand für das Elektron in das Bänderschema eingezeichnet werden. Lokalisiert bedeutet, der Zustand sitzt bei einer bestimmten Position  $x$ , nämlich genau dort, wo auch der Donator-Rumpf lokalisiert ist. Bindungsenergien liegen für Elektronen, die an einen Donatorrumpf gebunden sind, im Bereich weniger Milli-Elektronenvolt bis zu einigen 10 meV. Diese Bindungsenergien sind im Allgemeinen so klein, zumindest für Donatoren im Silizium, dass diese Bindungsenergie leicht von der thermischen Anregung überwunden werden kann. Die Elektronen sind dann nicht mehr an den Donatoren mittels Coulomb-Anziehung lokalisiert, sondern befinden sich dann doch an der Unterkante des Leitungsbandes, sind also frei beweglich.

Für Akzeptoren gilt die Diskussion sinngemäß ganz genauso.



Das Einbringen von Donatoren oder Akzeptoren in das Halbleiter-Kristallgitter nennt man Dotierung. Mit Donatoren ergibt sich eine n-Dotierung, also eine Erhöhung der Elektronen-Konzentration. Mit Akzeptoren ergibt sich eine p-Dotierung, also eine Erhöhung der Löcher-Konzentration. Löcher- und Elektronenkonzentration sind allerdings nicht unabhängig voneinander. Erhöht man die Elektronenkonzentration, so verringert sich gleichzeitig die Löcherkonzentration, und umgekehrt. Das Produkt aus Elektronen- und Löcherkonzentration  $p_0 \cdot n_0$  bleibt allerdings gleich  $n_i \cdot n_i$ , also dem Produkt der intrinsischen Ladungsträger-Konzentration. Die intrinsischen Trägerdichten ergeben sich, wenn man ausschließlich thermische Aktivierung berücksichtigt, und keine Dotierung berücksichtigt, also für undotierte Halbleiter. Gleichzeitig verändert sich die Fermi-Energie. Diese ist als rote gestrichelte Linie eingezeichnet. Für hohe Elektronkonzentrationen befindet sich die Fermi-Energie in der Nähe des Leitungsbandes, für hohe Löcherkonzentrationen befindet sich die Fermi-Energie in der Nähe des Valenzbandes. Die Position der Fermi-Energie  $W_F$  und die Dotierung entsprechen sich.

**Die Besetzungswahrscheinlichkeit: Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion**

Der Parameter  $E_F$  wird Fermi-Energie genannt.  $E_F$  spielt bei der Beschreibung von Halbleiterbauelementen eine sehr wichtige Rolle !

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}$$

Die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion berücksichtigt die Tatsache, dass sich Elektronen nicht im selben Energiezustand befinden können.

$kT$  bei Raumtemperatur = 25 meV

Technische Universität Braunschweig

LENA Laborator für Energie Nanoelektronik

Institut für Halbleitertechnik

Karl-Heinrich Lohde, Andreas Ring, Michael Weick  
Integrierte Schaltungen

Aus der Theorie der Thermodynamik wissen wir, dass die Besetzungswahrscheinlichkeit von elektronischen Energieniveaus durch die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion gegeben ist. Diese lautet: (Gleichung). Trägt man die Besetzungswahrscheinlichkeit gegen die Energie bei verschiedenen Temperaturen auf, so ergeben sich die Kurven aus der unteren Abbildung. Für Energien viel kleiner als die Fermi-Energie sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten = 1, also alle Zustände dort sind besetzt. Für Energien viel größer als die Fermi-Energie sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten = 0, alle Zustände sind dort unbesetzt.

### Anschauliche Bedeutung der Fermi-Energie $W_f$




Vergleich den Fluss von Ladungen (=elektrischer Strom) mit dem Fluss von Wassermolekülen (=Wasserstrom)

Die Fermi-Energie entspricht dann dem Wasserstand / der Wasserhöhe

Eine Differenz der Wasserhöhen führt bei verbundenen Leitungen zu einem Wasserstrom. Erst wenn alle Höhenunterschiede ausgeglichen sind ergibt sich ein Gleichgewicht. Im Gleichgewicht ergibt sich ein Stromfluss = Null.

Stromfluss bedeutet Nicht-Gleichgewicht / Gradient der Wasserstände / Gradient von  $W_f$

Erst ein Gradient von  $W_f$  führt zu einem Stromfluss. Existiert Stromfluss, existiert auch ein Gradient in  $W_f$ .

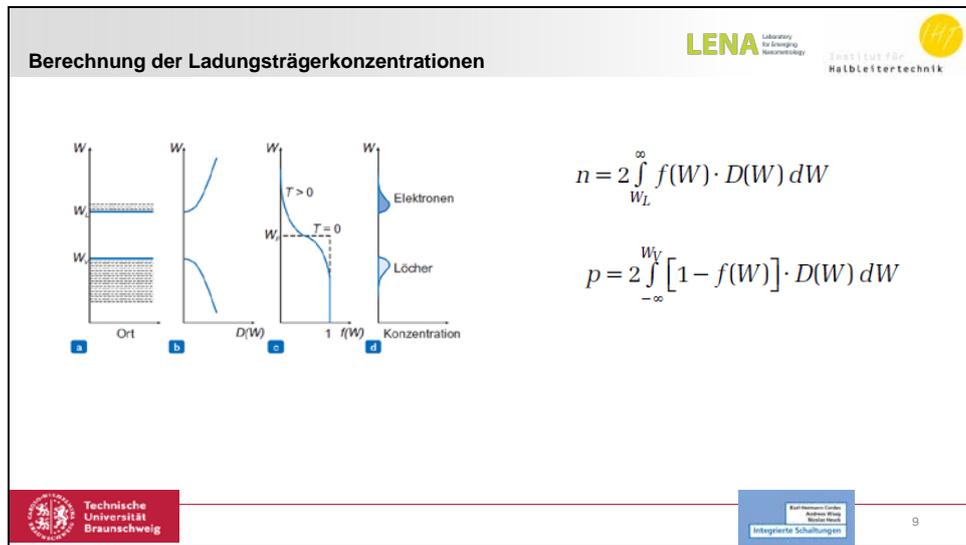
Später wird bewiesen:  $J_n = 0 = n \cdot \mu_n \cdot \frac{\partial W_f}{\partial X}$  im Gleichgewicht.



Technische Universität Braunschweig

8

Die Bedeutung der Fermi-Energie kann man in einem sehr anschaulichen Bild verdeutlichen. Die Fermi-Energie entspricht für Elektronen dem, was der Wasserstand in einem Netzwerk von Wasserleitungen ausmacht. Ist der Wasserstand überall gleich hoch, wird es keinen Wasserstrom geben. Erst ein Gradient der Füllhöhe führt zu einem Wasserstrom. Für Elektronen ist das ganz genau so. Ein Gradient der Fermi-Energie führt zu einem Ladungsstrom. Für Bandverläufe im Gleichgewicht, d.h. ohne von außen angelegte Spannung, verläuft die Fermi-Energie horizontal, da auch kein Strom fließt.



Berechnet man nun die Ladungsträger-Konzentration  $n$  für Elektronen, so muss man die Zahl der Zustände bei einer Energie  $W$  im Energieintervall  $dW$  mit der Besetzungswahrscheinlichkeit  $f(W)$  multiplizieren (Gleichung). Wir nehmen hier die Zustandsdichte  $D(W)$  als bekannt an, an anderer Stelle können wir diese berechnen. Integriert über alle Energien ergibt sich die Elektronenkonzentration  $n$ . Dabei ist noch ein Faktor 2 zu berücksichtigen, da jeder Zustand von 2 Elektronen - eines mit Spin-Up und eines mit Spin-Down - besetzt werden kann.

Die Berechnung der Löcherkonzentration folgt den selben Schritten. Nur muss berücksichtigt werden, dass die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung eines Zustands mit einem Loch gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass der Energiezustand NICHT mit einem Elektron besetzt ist. Deshalb taucht in der Gleichung für Löcher der Term  $[1 - f(W)]$  auf.

Das Ergebnis des Integrals ist in der Graphik links dargestellt und zeigt das Bänderschema, die Zustandsdichte  $D(W)$ , die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion und den Wert des Integrals für  $n$  und  $p$ , d.h. von Elektronen und Löchern

**Näherung für kleine Ladungsträgerkonzentrationen**

Boltzmann-Näherung:  
Die Fermi-Dirac-Funktion wird im Bereich der Bandkanten durch eine Exponentialfunktion angenähert.

$$n = 2 \int_{W_L}^{\infty} f(W) \cdot D(W) dW$$

$$p = 2 \int_{-\infty}^{W_V} [1 - f(W)] \cdot D(W) dW$$

**LENA** Laboratory for Energy Nanotechnology

INSTITUT FÜR Halbleitertechnik

$$f_{FD} = \frac{1}{\exp\left(\frac{W-W_F}{kT}\right) + 1}$$

↓

$$n = N_L e^{\frac{(W_F-W_L)}{kT}}$$

$$p = N_V e^{\frac{(W_V-W_F)}{kT}}$$



Karl-Heinrich-Ludwig  
Institute for  
Microelectronics  
Integrated Circuits

10

Die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion ist zwar keine Monsterfunktion, aber manchmal doch etwas unhandlich. Zur Vereinfachung von Rechnungen verwendet man oft eine Näherung: die Näherung der niedrigen Besetzung. Ist der Term  $(E-E_F)$  groß, sind also die Bestzungswahrscheinlichkeiten entweder nahe an 1 oder nahe an 0, dann wird der Exponentialterm im Nenner sehr groß. Die 1 im Nenner kann dann vernachlässigt werden und es ergibt sich eine einfache Exponentialfunktion, mit der sehr viel einfacher gerechnet werden kann. Das Integral über die Energie  $W$  kann unmittelbar ausgeführt werden.

Es ergeben sich übersichtliche Gleichungen für die Elektronkonzentration  $n$  und die Löcherkonzentration  $p$ . Die Elektronen- und Löcherkonzentrationen  $n$  und  $p$  sind dann exponentiell vom Abstand der Fermi-Energie von der Leitungsbandkante (im Fall von Elektronen) oder der Valenzbandkante (im Fall von Löchern) ab.

**Näherung für kleine Ladungsträgerkonzentrationen**

Hausaufgabe: Berechne aus den Integralen mit der Boltzmann-Näherung die Gleichungen für n und p.

$$n = 2 \int_{W_L}^{\infty} f(W) \cdot D(W) dW$$

$$p = 2 \int_{-\infty}^{W_V} [1 - f(W)] \cdot D(W) dW$$

**LENA** Laborator für Energie Nanoelektronik

INSTITUT FÜR Halbleitertechnik

$$f_{FD} = \frac{1}{\exp\left(\frac{W-W_F}{kT}\right) + 1}$$

↓

$$n = N_L e^{\frac{(W_F-W_L)}{kT}}$$

$$p = N_V e^{\frac{(W_V-W_F)}{kT}}$$



Technische  
Universität  
Braunschweig



Karl-Heinrich-Ludwig  
Institut für  
Halbleitertechnik  
Integrierte Schaltungen

11

Und hier eine Hausaufgabe: Berechnen Sie aus den Integralen für die Trägerkonzentrationen unter Berücksichtigung der Boltzmann-Näherung die beiden vereinfachten Gleichungen für n und p.

Noch eine Bemerkung: Wenn der Abstand der Fermi-Energie von der Leitungsbandkante  $W_L$  und der Valenzbandkante  $W_V$  gleich groß sind, dann ergibt sich:  $n=p$  (unter der Annahme, dass die beiden Größen  $N_L$  und  $N_V$  gleich groß sind). Oder anders herum formuliert: in intrinsischen Halbleitern, bei denen die Elektronen- und Löcherkonzentration gleich groß ist, befindet sich die Fermi-Energie in der Mitte der Bandlücke. Kleinere Abweichungen Weg von dieser Mitte ergeben sich, wenn  $N_L$  und  $N_V$  nicht gleich sind. Dies ist aber meist eine kleinere Korrektur, vor allem auch deshalb, weil n und p exponentiell von der Position der Fermi-Energie abhängen.

**Position der Fermi-Energie für undotierte Halbleiter**

**LENA** Laboratory for Energy Nanotechnology  **INSTITUT FÜR Halbleitertechnik**

**Hinweis**

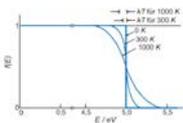
Die Fermi-Energie eines undotierten Halbleiters liegt wegen der Forderung  $n_i = p_i$  etwa in der Mitte der Bandlücke. Falls sich die Zustandsdichten von Elektronen und Löchern unterscheiden, so ist die Fermi-Energie leicht in Richtung niedrigere Zustandsdichte hin verschoben. Die Abweichung von der Mitte der Bandlücke ist allerdings normalerweise nicht sehr groß.

Die Fermi-Energie ist für die Beschreibung von Halbleiter-Bauelementen ein sehr wichtige Größe.

 Technische Universität Braunschweig  Institut für Halbleitertechnik 12

Bei undotierten Halbleitern liegt die Fermi-Energie in der Mitte der Bandlücke, da die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung von Zuständen im Leitungsband und die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung von Zuständen im Valenzband genau gleich groß sein muss. Die Elektronenkonzentration  $n$  muss nämlich für intrinsische Halbleiter genau gleich der Löcherkonzentration  $p$  sein.

### Intrinsische Ladungsträger-Konzentration



$$f_{FD}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}$$

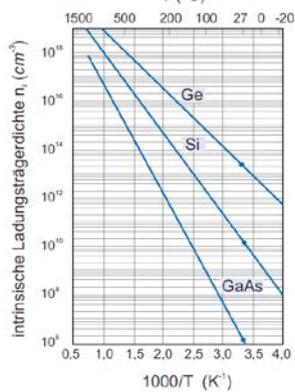
Die thermisch aktivierte Ladungsträgerkonzentration wird **intrinsische Ladungsträgerkonzentration** genannt.

Je größer die Bandlücke, desto kleiner die intrinsische Ladungsträger-Konzentration bei Raumtemperatur.



Laboratory for Energy Nanotechnology  
 INSTITUT FÜR Halbleitertechnik







Technische  
Universität  
Braunschweig

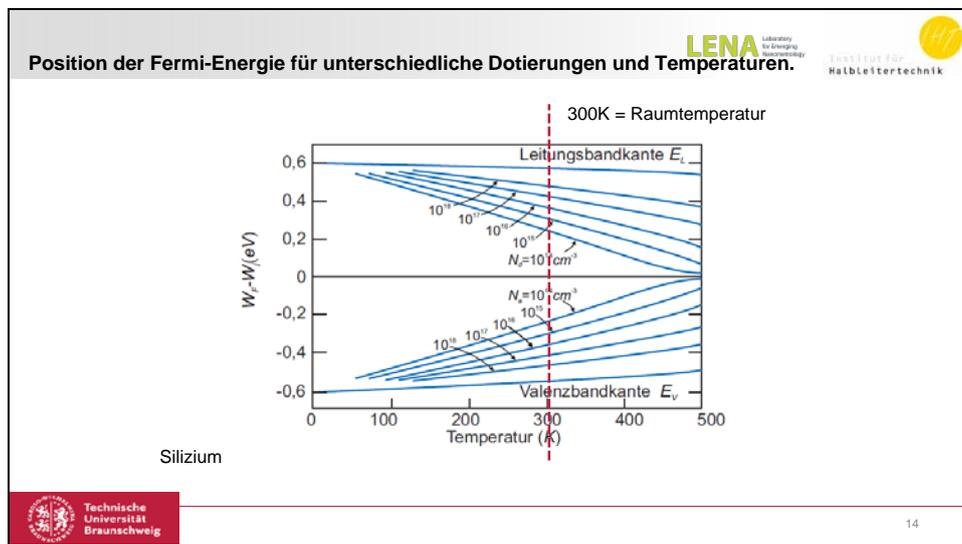


Institut für Energie  
Nanotechnologie  
Integrierte Schaltungen

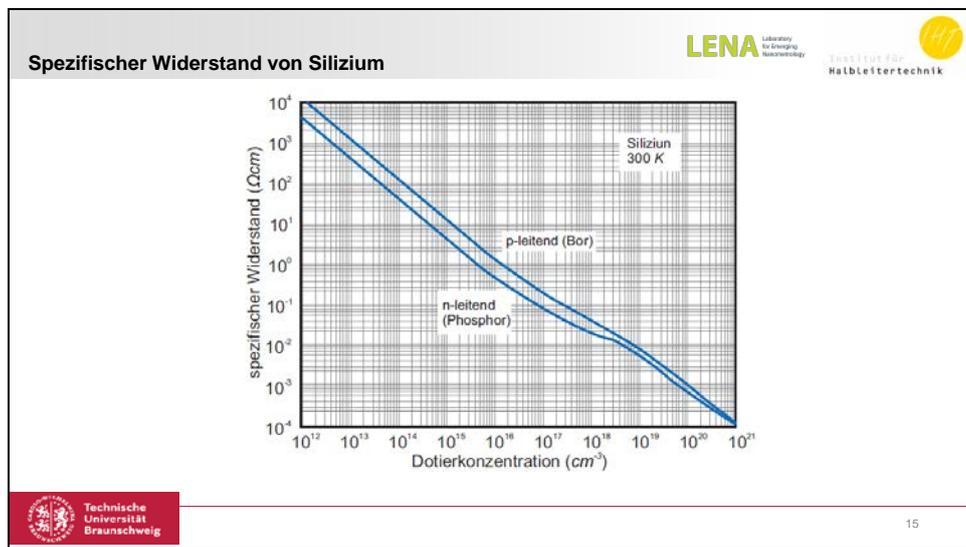
Multipliziert man die Fermi-Dirac-Besetzungswahrscheinlichkeit mit der Zahl der Zustände, die bei einer Energie E zur Verfügung stehen (Rechnung hier nicht gezeigt) und integriert über alle Energien, so erhält man die Gesamtzahl an Elektronen, die thermisch über die Bandlücke hinweg ins Leitungsband angeregt wurden. Diese Werte hängen von der Bandlücke – und damit vom Halbleitermaterial – und von der Temperatur ab. Je höher die Bandlücke, desto exponentiell niedriger die Ladungsträgerkonzentration. Diese hängt ebenfalls exponentiell von der Temperatur ab, siehe Gleichung. Die halb-logarithmische Auftragung über 1/T liefert deshalb eine Gerade.

Die durch thermische Aktivierung entstehende Ladungsträgerkonzentration nennt man „intrinsische Ladungsträgerkonzentration“.

Im Allgemeinen ist die intrinsische Ladungsträgerkonzentration in Halbleitern sehr klein und spielt in Transistoren und LEDs eine untergeordnete Rolle.



Aus dem bisher gesagten kann man den Schluss ziehen, dass sich die Fermi-Energie als Funktion der Temperatur von den Bandkanten (für dotierte Halbleiter) in die Mitte der Bandlücke bewegen muss. Dies zeigt diese Abbildung. Bei z.B. Raumtemperatur ist die Fermi-Energie Richtung Leitungsband (für n-Dotierung) oder Richtung Valenzband (für p-Dotierung) verschoben. Für höhere Temperaturen wird die intrinsische Ladungsträgerkonzentration sehr hoch und damit  $n=p$ . Die Fermi-Energie kehrt dann in die Mitte der Bandlücke zurück.



Diese Abbildung zeigt den spezifischen Widerstand als Funktion der Dotierkonzentration für Silizium bei 300 K Temperatur. Der spezifische Widerstand bzw. die Leitfähigkeit kann in sehr weiten Bereichen eingestellt werden. Dies macht den Einsatz von Halbleitern für elektronische und photonische Bauelemente besonders wertvoll.